# § A Medida na Teoria Quântica



Temos um sistema físico e um observável $A$, caraterizado por um operador $A$.

P.A.M. Dirac (1958):

"A measurement always causes the system to jump into an eigenstate of the dynamical variable that is being measured"

Seja $\{|a'\rangle\}$ o conjunto de autoestados de $A$.
Antes que a medição de $A$ seja feita, assumimos que o sistema físico é representado por uma combinação linear

$$\boxed{|\alpha\rangle = \sum_{\{a'\}} c_{a'} |a'\rangle = \sum_{a'} |a'\rangle\langle a'|\alpha\rangle}$$

$$\boxed{c_{a'} = \langle a'|\alpha\rangle}$$

Quando a medição de $A$ é realizada, o sistema passa bruscamente para um dos autoestados $|a'\rangle$ de $A$.
Este processo é chamado as vezes "colapso da função estado".

$$|\alpha\rangle \xrightarrow{\text{Medida de } A} |a'\rangle$$

▶ A medição, geralmente, muda o estado, $|\alpha\rangle \to |a'\rangle$, e o valor medido de $A$ é $a'$. Os possíveis valores de uma medição de $A$ são então seus autovalores $\{a'\}$.

▸ <u>Não é possível predizer de antemão</u> qual dos valores de $\{a'\}$ será obtido no processo de medição (exceto no caso em que $|\alpha\rangle \equiv |a'\rangle$, em cujo caso o valor obtido é <u>a'</u> com certeza)

▸ <u>Postulado</u>. Assumamos que o estado $|a\rangle$ está normalizado: $\langle\alpha|\alpha\rangle = 1$. Postulamos que a probabilidade de "saltar" para um particular autoestado de $A$, digamos $|a'\rangle$, é

$$P_{a'} \equiv |\langle a'|\alpha\rangle|^2$$

$$|\alpha\rangle = \sum_{a'} |a'\rangle\langle a'|\alpha\rangle \Rightarrow \langle\alpha|\alpha\rangle = \sum_{a'} \langle\alpha|a'\rangle\langle a'|a\rangle$$

$$= \sum_{a'} |\langle a'|\alpha\rangle|^2 = \sum_{a'} P_{a'} = 1$$

▸ <u>Ensemble</u>. Apesar de falarmos de um sistema físico simples, empiricamente, para determinar a probabilidade acima devemos considerar um número grande de medições realizadas sobre um ensemble, isto é uma coleção de sistemas físicos <u>preparados de maneira idêntica</u>, todos eles caraterizados pelo mesmo ket $|\alpha\rangle$. Um ensemble deste tipo é chamado <u>ensemble puro</u>

Uma vez que o estado colapsou para $|a'\rangle$, outra medição posterior, <u>realizada imediatamente</u>, dará o resultado

$\underline{a'}$ com certeza. Por outro lado, a probabilidade de que o sistema, inicialmente caraterizado por $|a'\rangle$, salte para o autoestado $|a''\rangle$, com $a' \neq a''$, é nula porque os autoestados correspondentes são ortogonais.

Obs. As probabilidades assim definidas satisfazem requerimentos gerais da teoria de probabilidades:

a) $P_{a'} = |\langle a'|\alpha\rangle|^2 \geqslant 0$

b) $\sum_{a'} P_{a'} = \sum_{a'} |\langle a'|\alpha\rangle|^2 = 1$

▶ Valor médio (esperado). O valor médio $\langle A\rangle$ de um observável $A$ em relação ao estado $|\alpha\rangle$ é definido como:

$$\langle A\rangle_\alpha \equiv \langle\alpha|A|\alpha\rangle$$

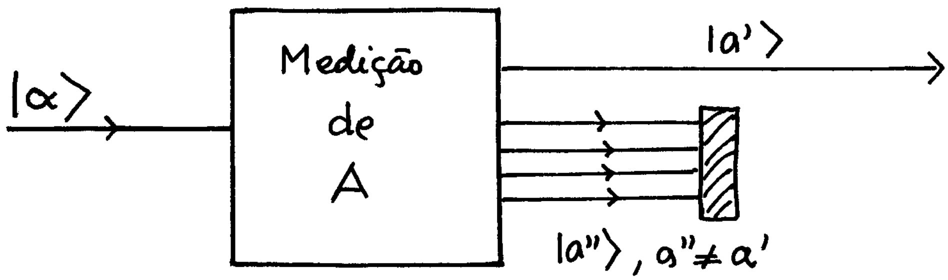
$$\langle A\rangle = \sum_{a',a''} \langle\alpha|a'\rangle \underbrace{\langle a'|A|a''\rangle}_{a''\,\delta_{a''a'}} \langle a''|\alpha\rangle$$

$$= \sum_{a'} a' |\langle a'|\alpha\rangle|^2 = \sum_{a'} a' P_{a'}$$

A definição concorda com nossa noção intuitiva de valor médio.

<u>Medição seletiva ou filtração</u> ( Generalização da experiência de Stern - Gerlach )

Imaginamos um aparelho que seleciona apenas um dos autoestados de $A$, por exemplo $|a'\rangle$, e rejeita todos os outros (são absorvidos ou bloqueados )




O efeito de uma medição deste tipo pode ser representado através de um operador de projeção

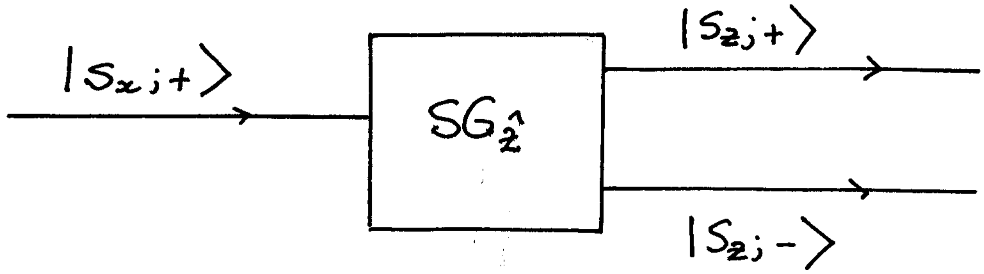
$$\Lambda_{a'} \equiv |a'\rangle\langle a'|$$

$$\Lambda_{a'}|\alpha\rangle = |a'\rangle\langle a'|\alpha\rangle$$

<u>Exemplo</u>: Sistema de spin $\frac{1}{2}$ outra vez

Usamos os postulados da MQ para determinar os operadores ($S_x$, $S_y$) junto com seus autoestados $|S_x;\pm\rangle$, $|S_y;\pm\rangle$.
Lembramos que um feixe de partículas com ($S_x+$), quando submetido a um aparelho $SG\hat{z}$, é separado em duas componentes de igual intensidade (mesmo número de

partículas).




Isso significa que a partícula aparece com igual probabilidade em qualquer um dos estados disponíveis:

$$|\langle S_z;+|S_x;+\rangle|^2 = |\langle S_z;-|S_x;+\rangle|^2 = \frac{1}{2}$$

ou
$$|\langle S_z;+|S_x;+\rangle| = |\langle S_z;-|S_x;+\rangle| = \frac{1}{\sqrt{2}} .$$

Construímos portanto o ket:

$$|S_x;+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\delta_1}|-\rangle ,$$

onde usamos $(|+\rangle, |-\rangle)$ para os autoestados de $S_z$. Temos eliminado uma fase global no estado (sem conseqüências físicas), e escolhido o coeficiente de $|+\rangle$ como positivo por convenção. O outro ket $|S_x;-\rangle$ deve ser ortogonal ao primeiro pois ambos representam estados mutuamente excludentes:

$$|S_x;-\rangle = c_+|+\rangle + c_-|-\rangle$$

$$\langle S_x;+|S_x;-\rangle = \frac{c_+}{\sqrt{2}} + \frac{c_- e^{-i\delta_1}}{\sqrt{2}} = 0$$

e a normalização $\quad |c_+|^2 + |c_-|^2 = 1$

$$c_- = -c_+ e^{i\delta_1}$$

$$1 = |c_+|^2 + |c_+|^2 = 2|c_+|^2 \Rightarrow |c_+| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Outra vez, por convenção, se escolhe $c_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}$, e assim temos:

$$|S_x;-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle - \frac{e^{i\delta_1}}{\sqrt{2}}|-\rangle$$

Os autovalores de $S_x$ são $\pm\hbar/2$. Assim, sua representação espectral é

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\Big(|S_x;+\rangle\langle S_x;+| - |S_x;-\rangle\langle S_x,-|\Big),$$

que pode ser representado também na base $(|+\rangle, |-\rangle)$ de $S_z$:

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\delta_1}|-\rangle\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\langle +| + \frac{e^{-i\delta_1}}{\sqrt{2}}\langle -|\right) - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle - \frac{e^{i\delta_1}}{\sqrt{2}}|-\rangle\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\langle +| - \frac{e^{-i\delta_1}}{\sqrt{2}}\langle -|\right)\right]$$

$$= \frac{\hbar}{2}\left\{\cancel{\frac{1}{2}|+\rangle\langle +|} + \cancel{\frac{1}{2}|-\rangle\langle -|} + \frac{e^{-i\delta_1}}{2}|+\rangle\langle -| + \frac{e^{i\delta_1}}{2}|-\rangle\langle +| - \right.$$

$$-\frac{1}{2}\cancel{|+\rangle\langle+|} - \frac{1}{2}\cancel{|-\rangle\langle-|} + \frac{e^{i\delta_1}}{2}|-\rangle\langle+| + \frac{e^{-i\delta_1}}{2}|+\rangle\langle-| \Big\}$$

$$= \frac{\hbar}{2}\left( e^{-i\delta_1}|+\rangle\langle-| + e^{i\delta_1}|-\rangle\langle+| \right) = S_x$$

que representa um operador hermiteano (como deve ser!).

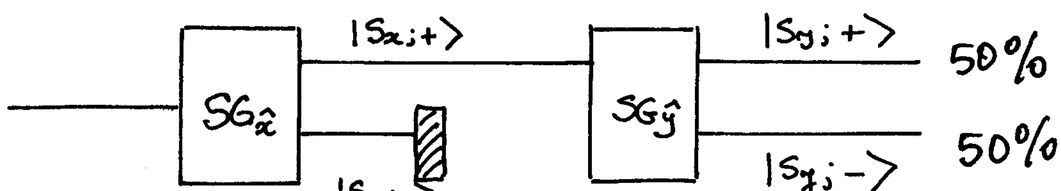
Por simetria, os mesmos argumentos usados com $S_x$, poderiam ser usados para $S_y$. Assim escrevemos:

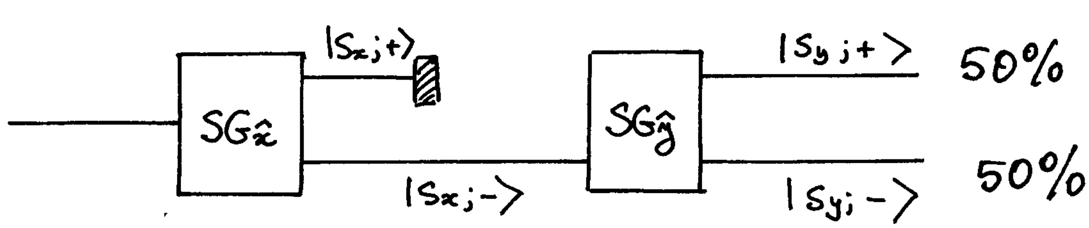
$$|S_y;\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle \pm \frac{e^{i\delta_2}}{\sqrt{2}}|-\rangle$$

e

$$S_y = \frac{\hbar}{2}\left( e^{-i\delta_2}|+\rangle\langle-| + e^{i\delta_2}|-\rangle\langle+| \right)$$

► Tarefa: determinar $\delta_1$ e $\delta_2$. Temos informação adicional a partir de uma experiência com sucessivos aparelhos de S-G $\hat{x}$ e SG $\hat{y}$, com resultados



o que mostra que
$$|\langle S_y;\pm|S_x;+\rangle| = |\langle S_y;\pm|S_x;-\rangle| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Este resultado expressa nada mais que a simetria de rotação (não temos direção privilegiada no espaço). Assim temos:

$$\langle S_y;\pm|S_x;+\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\langle+| \pm \frac{e^{-i\delta_2}}{\sqrt{2}}\langle-|\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{e^{i\delta_1}}{\sqrt{2}}|-\rangle\right)$$
$$= \left(\frac{1}{2} \pm \frac{e^{i(\delta_1-\delta_2)}}{2}\right)$$

e portanto:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = |\langle S_y;\pm|S_x;+\rangle| = \left|\frac{1}{2} \pm \frac{e^{i(\delta_1-\delta_2)}}{2}\right|$$
$$= \frac{1}{2}\left|1 \pm \cos(\delta_1-\delta_2) \pm i\,\mathrm{sen}\,(\delta_1-\delta_2)\right|,$$

que para os quadrados fornece

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{4}\left[(1\pm\cos(\delta_1-\delta_2))^2 + \mathrm{sen}^2(\delta_1-\delta_2)\right]$$
$$= \frac{1}{4}\left[2 \pm 2\cos(\delta_1-\delta_2)\right] = \frac{1}{2}\left[1\pm\cos(\delta_1-\delta_2)\right]$$

$\Rightarrow \cos(\delta_1-\delta_2) = 0$ . Solução: $\delta_1-\delta_2 = \pm\frac{\pi}{2}$

Segue deste resultado que os elementos de matriz de $S_x$ e $S_y$ não podem ser todos reais. Se escolhemos os de $S_x$ como sendo reais, então os de $S_y$ são puramente imaginários (e vice-versa), mostrando a necessidade de introduzir números complexos. É conveniente escolher os elementos de matriz de $S_x$ como sendo reais com $\delta_1 = 0$ (poderia também ser $\delta_1 = \pi$ ?). Para o segundo ângulo de fase temos $\delta_2 = \pm\frac{\pi}{2}$.

Para um sistema direito $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ a escolha correta é

$$\delta_1 = 0, \quad \delta_2 = \frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} S_x &= \frac{\hbar}{2}\left(|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|\right), \\ S_y &= \frac{\hbar}{2}\left(-i\,|+\rangle\langle-| + i\,|-\rangle\langle+|\right) \end{aligned}}$$

Identificando os estados $(|+\rangle, |-\rangle)$ com a base natural $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, podemos dar uma representação matricial dos operadores. Para $S_z$ temos:

$$S_z = \frac{\hbar}{2}\left(|+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-|\right) \longleftrightarrow \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$S_x \longleftrightarrow \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \quad S_y \longleftrightarrow \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}$$

Para os autoestados obtemos

$$\boxed{|S_x;\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|+\rangle \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\,|-\rangle}$$

$$\boxed{|S_y;\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle \pm \frac{i}{\sqrt{2}}|-\rangle} \; ,$$

com a representação matricial:

$$|S_x;\pm\rangle \longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$$

$$|S_y;\pm\rangle \longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix}$$

- Operadores escadas. Podemos definir operadores que trocam o spin:

$$S_+ \equiv \hbar\, |+\rangle\langle -| \quad , \quad S_- \equiv \hbar\, |-\rangle\langle +| \, ,$$

com representações matriciais

$$S_+ \leftrightarrow \hbar\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_- \leftrightarrow \hbar\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_+|+\rangle = \hbar\, |+\rangle\langle -|+\rangle = 0$$
$$S_+|-\rangle = \hbar\, |+\rangle\langle -|-\rangle = \hbar\, |+\rangle$$

$$\langle +|S_+|+\rangle = 0 = \langle -|S_+|+\rangle$$
$$\langle +|S_+|-\rangle = \hbar \qquad \langle -|S_+|-\rangle = 0$$

Para o outro operador temos:

$$S_-|+\rangle = \hbar\, |-\rangle \quad , \quad S_-|-\rangle = 0$$

Temos a identidade:

$$S_\pm = S_x \pm i S_y$$

As relações de comutação (ou anti-comutação) podem ser exploradas usando a representação matricial. No caso das componentes $(S_x, S_y)$ temos

$$S_x S_y = i\frac{\hbar^2}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad S_y S_x = -i\frac{\hbar^2}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$S_x S_y = i\frac{\hbar}{2} S_z \qquad\qquad S_y S_x = -i\frac{\hbar}{2} S_z$$

- Def: Comutador de dois operadores $A, B$

$$[A,B] \equiv AB - BA$$

- Def: Anti-comutador de $A, B$

$$\{A,B\} \equiv AB + BA$$

No caso particular dos operadores $(S_x, S_y)$ temos.

$$[S_x, S_y] = i\hbar S_z \quad , \quad \{S_x, S_y\} = 0$$

Como

$$S_z^2 = S_x^2 = S_y^2 = \frac{\hbar^2}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar^2}{4}\cdot 1 \ ,$$

as relações de comutação (anti-comutação) podem ser escritas de maneira compacta:

$$[S_i, S_j] = i\,\varepsilon_{ijk}\hbar S_k \quad , \quad i,j,k = x,y,z$$

e

$$\{S_i, S_j\} = \frac{\hbar^2}{2}\,\delta_{ij}$$

Costuma-se também definir o operador "quadrado do spin total":

$$\vec{S}^2 = \vec{S}\cdot\vec{S} \equiv S_x^2 + S_y^2 + S_z^2$$

$$= \frac{3}{4}\hbar^2 \cdot 1 \longleftrightarrow \frac{3}{4}\hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Este operador é uma constante e portanto comuta com outros operadores. Em particular temos:

$$[S^2, S_j] = 0 \quad , \quad j = x,y,z$$

## Operadores compatíveis

▸ Def. Dois observáveis $A$ e $B$, representados por operadores $(A,B)$, são definidos como sendo compatíveis quando

$$[A,B] = 0 \quad ;$$

e não-compatíveis quando

$$[A,B] \neq 0$$

<u>Exemplo</u>. Para spin $\frac{1}{2}$, $S^2$ e qualquer componente $S_j$ são operadores compatíveis. Em contra partida, as diferentes componentes do spin, $(S_x, S_y, S_z)$ não são compatíveis.

<u>Teorema</u>. Assumamos que $A$ e $B$ são observáveis compatíveis, e que os autovalores de $A$ são <u>não-degenerados</u>. Então os elementos de matriz $\langle a''|B|a'\rangle$ são todos diagonais

<u>Dem</u>. Para observáveis compatíveis $[A,B]=0$. Assim:

$$0 = \langle a''|\,[A,B]\,|a'\rangle = \langle a''|(AB-BA)|a'\rangle$$
$$= (a''-a')\langle a''|B|a'\rangle$$

ou

$$0 = (a''-a')\langle a''|B|a'\rangle\,,$$

e para $a' \neq a'' \Rightarrow \langle a''|B|a'\rangle = 0$. Escrevemos então

$$\langle a''|B|a'\rangle = \delta_{a'a''}\langle a'|B|a'\rangle$$

Desta maneira, tanto $A$ como $B$ tem representação diagonal na base $\{|a'\rangle\}$

$$A = \sum_{a'} a'\,|a'\rangle\langle a'|$$

$$B = \sum_{a'} |a'\rangle\langle a'|B|a'\rangle\langle a'|$$

Operemos com $B$ sobre um ket $|a'\rangle$:

$$B|a'\rangle = \sum_{a''} |a''\rangle\langle a''|B|a''\rangle \underbrace{\langle a''|a'\rangle}_{\delta_{a'a''}}$$

$$= \langle a'|B|a'\rangle\, |a'\rangle,$$

de maneira que $|a'\rangle$ é auto-ket de $B$ com autovalor

$$b' = \langle a'|B|a'\rangle$$

Resultado: O ket $|a'\rangle$ é auto-ket simultâneo dos observáveis $A$ e $B$, com autovalores $a'$ e $b' = \langle a'|B|a'\rangle$ respectivamente. Assim, para tratar $A$ e $B$ de maneira equivalente, escrevemos o ket como $|a', b'\rangle$, tal que

$$A|a', b'\rangle = a'|a', b'\rangle$$
$$B|a', b'\rangle = b'|a', b'\rangle$$

Que acontece no caso de espectro degenerado? Assumimos degenerescência de ordem $n$:

$$A|a'^{(i)}\rangle = a'|a'^{(i)}\rangle, \quad i = 1, 2 \ldots, n$$

$$\langle a'^{(i)}|a'^{(j)}\rangle = \delta_{ij}$$

Para kets fora do espaço de degenerescência o teorema continua válido. No espaço de degenerescência não mostramos nada porque:

$$0 = \langle a'^{(i)} | [A,B] | a'^{(j)} \rangle = (a'-a') \langle a'^{(i)} | B | a'^{(j)} \rangle ,$$

que é uma identidade. Mas como $B$ é um operador hermiteano

$$\langle a'^{(i)} | B | a'^{(j)} \rangle = \langle a'^{(j)} | B | a'^{(i)} \rangle^*$$

e a matriz de $B$ no subespaço de degenerescência sempre pode ser diagonalizada através de combinações lineares convenientes de $\{|a'^{(i)}\rangle\}$:

$$|b'\rangle = \sum_{i=1,\dots n} c_i \, |a'^{(i)}\rangle$$

com $B|b'\rangle = b'|b'\rangle$. Notamos que $|b'\rangle$ é também auto-ket de $A$ com $A|b'\rangle = a'|b'\rangle$. Em geral os autovalores de $B$ referidos ao subespaço $\{|a'^{(i)}\rangle\}$ são diferentes, de maneira que a notação $|a',b'\rangle$ não é supérflua.

Medição de Operadores compatíveis.

Medimos primeiro $A$ e obtemos o resultado $a'$. Depois medimos $B$ e obtemos o resultado $b'$. Finalmente medimos $A$ de novo. Segue da discussão anterior, que o resultado será $\underline{a'}$ com certeza (probabilidade 1). A medição de $B$, neste caso, não destrói a informação obtida na primeira medida de $A$,

$$|a\rangle \xrightarrow[A]{\text{med. de}} |a'b'\rangle \xrightarrow[B]{\text{med. de}} |a',b'\rangle \xrightarrow[A]{\text{med. de}} |a',b'\rangle,$$

quer dizer que podemos dar valores simultâneos para os observáveis $A$ e $B$.

Este argumento continua válido na presença de degenerescência. Na primeira medição que fornece o resultado $a'$, o estado salta para um ket do tipo

$$\sum_{i=1,2..n} c_{a'}^{(i)} |a', b^{(i)}\rangle \quad ,$$

onde $\underline{n}$ é a ordem de degenerescência. A posterior medição de $B$ faz saltar o estado para uma particular componente

$$|a', b^{(i)}\rangle$$

Finalmente, a medição de $A$ dará o valor $\underline{a}'$ com certeza. Às vezes é usado um índice coletivo $K'$ em lugar dos conjuntos de índices $(a', b')$

$$|K'\rangle = |a'b'\rangle$$

Este argumento pode ser generalizado para vários observáveis mutuamente compatíveis:

$$[A,B]=[B,C]=[A,C]=\dots=0$$

Assumimos que temos encontrado um conjunto maximal de observáveis que comutam (não triviais), de maneira que nenhum outro pode ser adicionado à lista acima.
Os autovalores de um operador individual podem ser degenerados, mas fornecendo a lista completa dos autovalores de $A, B, C, \dots$, isto é $(a', b', c', \dots)$, determinamos univocamente os autokets:

$$|K'\rangle = |a'b'c'\dots\rangle$$

Ortonormalidade:

$$\langle K''|K'\rangle = \delta_{K'K''} = \delta_{a''a'}\delta_{b''b'}\delta_{c''c'}\cdots,$$

e a relação de completeza se expressa por

$$\sum_{K'} |K'\rangle\langle K'| = \sum_{a'}\sum_{b'}\sum_{c'}\cdots |a'b'c'\dots\rangle\langle a'b'c'\dots|$$
$$= 1$$